Égalons les composantes

$$-\|\vec{T}_1\| \cos 50° + \|\vec{T}_2\| \cos 32° = 0$$
$$\|\vec{T}_1\| \sin 50° + \|\vec{T}_2\| \sin 32° = 100$$

Résolvons le première de ces équations par rapport à $\vec{T}_2$ et substituons l'expression obtenue dans la deuxième :

$$\|\vec{T}_1\|\sin 50° + \frac{\|\vec{T}_1\|\cos 50°}{\cos 32°} = 100$$

Les normes des tensions sont donc

$$\|\vec{T}_1\| = \frac{100}{\sin 50° + \operatorname{tg} 32° \cos 50°} \approx 85{,}64 \text{ N}$$

et

$$\|\vec{T}_2\| = \frac{\|\vec{T}_1\|\cos 50°}{\cos 32°} \approx 64{,}91 \text{ N}$$

Reste à remplacer ces valeurs dans (5) et (6) pour obtenir les tensions

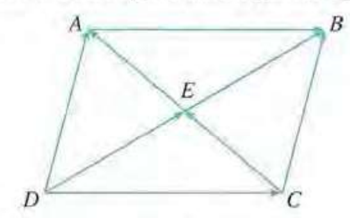
$$\vec{T}_1 \approx -55{,}05\vec{i} + 65{,}60\vec{j} \qquad \vec{T}_2 \approx 55{,}05\vec{i} + 34{,}40\vec{j}.$$

9.2 Exercices

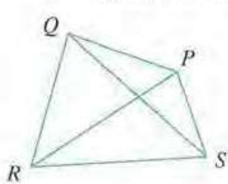
1. Les quantités suivantes sont-elles des vecteurs ou des scalaires ? Expliquez.
a) Le coût d'un billet de théâtre.
b) Le courant d'une rivière.
c) Le trajectoire initiale du vol Houston Dallas.
d) La population mondiale.

2. Quelle relation y a-t-il entre le point (4, 7) et le vecteur (4, 7) ? Illustrez votre réponse.

3. Citez tous les vecteurs égaux dans le parallélogramme.



4. Écrivez chaque combinaison de vecteurs comme un seul vecteur.
a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Recopier les vecteurs de la figure et, à partir de ceux-ci, tracez les vecteurs suivants.
a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $\vec{v} + \vec{w}$ d) $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$



6. Recopier les vecteurs de la figure et, à partir de ceux-ci, tracez les vecteurs suivants.
a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$
c) $\frac{1}{2}\vec{a}$ d) $-3\vec{b}$
e) $\vec{a} + 2\vec{b}$ f) $2\vec{b} - \vec{a}$



7–10 Déterminez le vecteur $\vec{a}$ représenté par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$. Dessinez $\overrightarrow{AB}$ et une autre représentation équivalente dont le point initial est l'origine.

7. $A(-1, 3)$, $B(2, 2)$ **8.** $A(2, 1)$, $B(0, 6)$

9. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **10.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

1. Aide disponible dans TEC.

11-14 Déterminez la somme des vecteurs donnés et illustrez géométriquement.

11. $(-1, 4)$, $(6, -2)$
12. $(-2, -1)$, $(5, 7)$
13. $(0, 1, 2)$, $(0, 0, -3)$
14. $(-1, 0, 2)$, $(0, 4, 0)$

15-18 Déterminez $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$, $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

15. $\vec{a}=(5, -12)$, $\vec{b}=(-3, -6)$
16. $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$
17. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$
18. $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$

19-21 Déterminez le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur donné.

19. $-3\vec{i}+7\vec{j}$
20. $(-4, 2, 4)$
21. $8\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$

22. Cherchez un vecteur de même sens et de même direction que $(-2, 4, 2)$, mais de longueur 6.

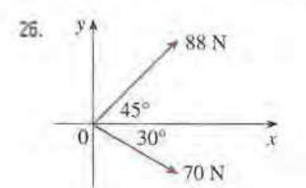
23. Quelles sont les composantes de $\vec{v}$ si $\vec{v}$ se trouve dans le premier quadrant, fait un angle de $\pi/3$ avec la partie positive de l'axe Ox et si $\|\vec{v}\|=4$?

24. Un enfant tire une luge sur la neige en exerçant une force de 50 N dans une direction qui fait un angle de 38° avec l'horizontale. Quelles sont les composantes horizontale et verticale de la force ?

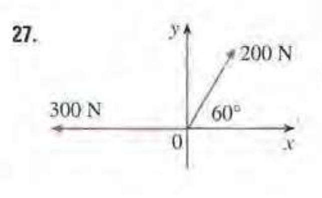
25. Un buteur tire le ballon avec un angle d'élévation de 40° et une vitesse de 18 m/s. Déterminez les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.

26-27 Déterminez la force résultante et l'angle qu'elle fait avec la direction positive de l'axe Ox.

26.



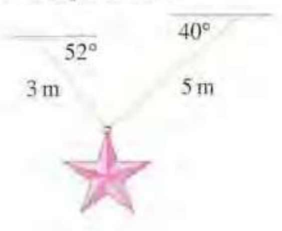
27.



28. Les vitesses ont une mesure, une direction et un sens ; elles sont donc des vecteurs. La mesure d'un vecteur vitesse est appelée la *vitesse scalaire*. On suppose que le vent souffle à 45° nord-ouest (cela veut dire à 45° à l'ouest de la direction nord). Un avion se dirige à 60° nord-est à une vitesse (par rapport à l'air tranquille) de 250 km/h. Le vol réel de l'avion s'effectue dans la direction résultante des vecteurs vitesses de l'avion et du vent. La vitesse scalaire par rapport au sol de l'avion est le module de la résultante. Déterminez la direction réellement suivie par l'avion et sa vitesse scalaire par rapport au sol.

29. Une femme marche droit vers l'ouest sur le pont d'un navire à la vitesse de 3 km/h. Le bateau navigue vers le nord à la vitesse de 22 km/h. Déterminez la vitesse scalaire et la direction de la femme par rapport à la surface de l'eau.

30. Des cordes de 3 m et 5 m de long font partie d'une guirlande décorative placée à l'occasion de la braderie du quartier. La décoration a une masse de 5 kg. Les cordes, attachées à des hauteurs différentes, font des angles de 52° et 40° par rapport à l'horizontale. Déterminez la tension de chaque corde ainsi que le module de chaque tension.



31. Une corde à linge est fixée à deux poteaux distants de 8 m. La corde est tout à fait tendue et fait une flèche négligeable. Une chemise mouillée de 0,8 kg de masse est suspendue au milieu de la corde qui descend alors de 8 cm. Déterminez la tension de chaque moitié de la corde à linge.

32. La tension $\vec{T}$ à chaque extrémité de la chaîne est de 25 N. Quel est le poids de la chaîne ?



33. Déterminez les vecteurs unitaires parallèles à la tangente à la parabole $y=x^2$ au point $(2, 4)$.

34. a) Déterminez les vecteurs unitaires parallèles à la tangente à la courbe $y=2\sin x$ au point $(\pi/6, 1)$.
b) Déterminez les vecteurs unitaires qui sont perpendiculaires à la tangente.
c) Dessinez la courbe $y=2\sin x$ et les vecteurs des parties a) et b), tous deux issus de $(\pi/6, 1)$.

35. a) Dessinez les vecteurs $\vec{a}=(3, 2)$, $\vec{b}=(2, -1)$ et $\vec{c}=(7, 1)$.
b) Montrez par un dessin qu'il existe des scalaires s et t tels que $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$.
c) Estimez sur le dessin les valeurs de s et t.
d) Calculez les valeurs exactes de s et t.

36. Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs non nuls et non parallèles et soit $\vec{c}$ un vecteur quelconque du plan déterminé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Montrez géométriquement que $\vec{c}$ peut être écrit sous la forme $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$, pour des scalaires s et t convenables. Donnez ensuite une démonstration de ce résultat en utilisant des composantes.

37. On suppose que $\vec{a}$ est un vecteur unitaire de dimension trois du premier octant qui part de l'origine et qui fait un angle de 60° avec la partie positive de l'axe Ox et de 72° avec la partie positive de l'axe Oy. Écrivez les composantes de $\vec{a}$.

38. Soient α, β et γ les angles que fait un vecteur $\vec{a}$ respectivement avec les parties positives des axes Ox, Oy et Oz. Déterminez les composantes de $\vec{a}$ et démontrez que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(Les nombres $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont appelés les *cosinus directeurs* de $\vec{a}$.)

39. Étant donné $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, décrivez l'ensemble de tous les points (x, y, z) tels que $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| = 1$.

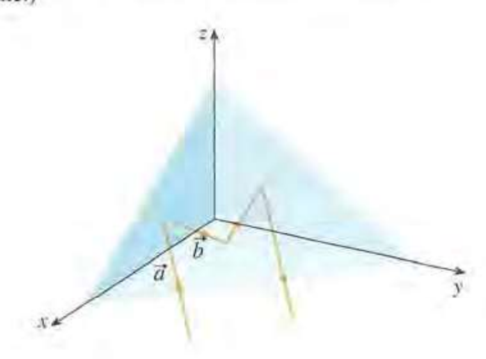
40. Étant donné $\vec{r} = (x, y)$ et $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, décrivez l'ensemble de tous les points (x, y) tels que $\|\vec{r} - \vec{r}_1\| + \|\vec{r} - \vec{r}_2\| = k$, où $k > \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$.

41. La figure 16 donne une démonstration géométrique de la Propriété 2 des vecteurs. Donnez une démonstration algébrique en termes de composantes dans le cas $n = 2$.

42. Démontrez algébriquement la Propriété 5 des vecteurs dans le cas $n = 3$. Utilisez ensuite des triangles semblables pour en donner une preuve de nature géométrique.

43. Démontrez vectoriellement que le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et en mesure la moitié.

44. On suppose que les trois plans de coordonnées sont des miroirs et qu'un rayon de lumière représenté par le vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ frappe d'abord le plan Oxz, comme dans la figure. Utilisez le fait que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence pour montrer que la direction du rayon réfléchi est donnée par $\vec{b} = (a_1, -a_2, a_3)$. Déduisez-en qu'après avoir été réfléchi par les trois miroirs perpendiculaires, le rayon sortant est parallèle au rayon initial. (Les chercheurs américains de l'espace ont utilisé ce principe, en même temps que des rayons laser et un tableau de miroirs en coin sur la Lune, pour déterminer avec précision la distance de la Terre à la Lune.)



9.3 Le produit scalaire

Jusqu'ici, nous avons additionné deux vecteurs et multiplié un vecteur par un scalaire. Se pose alors la question : comment multiplier deux vecteurs de manière à ce que leur produit soit un résultat utile ? Le produit scalaire que nous étudions dans cette section est une des réponses possibles à cette question. Le produit vectoriel en est une autre et sera étudié dans la section suivante.

Le travail et le produit scalaire

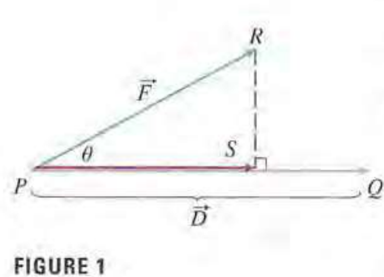


FIGURE 1

En physique et en sciences appliquées il y a des situations dans lesquelles il faut tenir compte de deux vecteurs, c'est le cas par exemple lors du calcul du travail effectué par une force. Dans la section 6.5, nous avons défini le travail accompli par une force constante F qui fait se déplacer un objet d'une distance d par $W = Fd$, mais cette définition n'est valable que si la direction dans laquelle est exercée la force est celle du mouvement de l'objet. Supposons maintenant que la force constante est un vecteur $\vec{F} = \overrightarrow{PR}$ orienté différemment, comme dans la figure 1. Si la force déplace l'objet de P vers Q, alors le **vecteur déplacement** est $\vec{D} = \overrightarrow{PQ}$. Deux vecteurs sont en présence ici, la force $\vec{F}$ et le déplacement $\vec{D}$. Le **travail** effectué par $\vec{F}$ est défini comme la norme du déplacement, $\|\vec{D}\|$, multipliée par la norme de la force appliquée dans la direction du mouvement, qui, selon la figure 1, est

$$\|\overrightarrow{PS}\| = \|\vec{F}\|\cos\theta.$$

Le travail effectué par $\vec{F}$ est donc défini par

$$W = \|\vec{D}\|(\|\vec{F}\|\cos\theta) = \|\vec{F}\|\,\|\vec{D}\|\cos\theta. \qquad \boxed{1}$$

Notez que le travail est une grandeur scalaire ; elle n'a pas d'orientation ni de sens ; mais sa valeur dépend de l'angle entre les vecteurs force et déplacement.

Nous nous servons de l'expression 1 pour définir le produit scalaire de deux vecteurs, même lorsqu'ils ne représentent pas une force ou un déplacement.